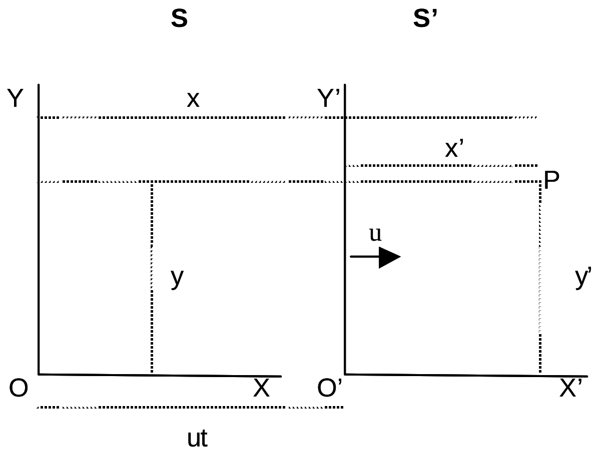
Transformación de Galileo/ Transformación de Lorentz

Supongamos dos sistemas de referencia S (fijo) y S’ (alejándose de S según la dirección positiva del eje OX a una velocidad constante u).



Si los orígenes coinciden en $t = t' = 0$ las coordenadas del punto P serán:

$$\boxed{\boldsymbol{x = x' + ut \quad y = y' \quad z = z' \quad t = t'}}$$

ecuaciones que constituyen el grupo de ***transformaciones de Galileo***.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + u \Rightarrow v = v' + u$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2} \Rightarrow a = a'$$

la última igualdad ($a = a'$) indica que la aceleración de la partícula es la misma en ambos sistemas de referencia.

De la ecuación de velocidades ($v = v' + u$) se deduce que esta transformación sólo puede ser válida para $v' << c$, pues si $v' = c$ se obtendría $v = c + ut$, es decir $v > c$, resultado que contradice la hipótesis de Einstein de que la velocidad de la luz es una invariante física que tiene el mismo valor para todos los observadores.

Para obtener la **transformación relativista o de Lorentz** supondremos que:

$$x = k(x' + ut') \qquad x' = k(x - ut)$$

Si se emite un pulso luminoso en $t = t' = 0$ desde el origen la ecuación del frente de ondas será:

$x = ct \qquad x' = ct'$

$$ct = k(ct' + ut') = kt'(c + u) \Rightarrow t' = \frac{ct}{k(c + u)}$$

$$ct' = k(ct - ut) = kt(c - u) \Rightarrow t' = \frac{kt(c - u)}{c}$$

$$\frac{ct}{k(c + u)} = \frac{kt(c - u)}{c} \Rightarrow k^2 = \frac{c^2}{c^2 - u^2} = \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \Rightarrow t' = \frac{\frac{c-u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}}{c}t$$

Teniendo en cuenta el valor de k en $x = k(x' + ut')$ se obtiene: $\boldsymbol{x} = \dfrac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$

y combinando esta ecuación con $x' = k(x - ut) \Rightarrow x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ se obtiene la relación entre t y

t': $\qquad \sqrt{\left(-\frac{-c^2+u^2}{c^2}\right)}\, x' + ut = \dfrac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \Rightarrow t = \dfrac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$

Con lo que se tiene el grupo de ***transformaciones de Lorentz***:

$$\boxed{\quad x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = \frac{t' + \frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}}$$

Para obtener la transformación de velocidades:

$$x = k(x' + ut') \Rightarrow dx = k(dx' + udt')$$

$$t = k\left(t' + \frac{ux'}{c^2}\right) \Rightarrow dt = k\left(dt' + \frac{u}{c^2}dx'\right)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + udt'}{dt' + \frac{u}{c^2}dx'} \Rightarrow v = \frac{v' + u}{1 + \frac{u}{c^2}v'}$$

Cuando:

$v' << c \rightarrow v = v' + u$ (transformación de Galileo)

$v' = c \rightarrow v = \frac{c + u}{1 + \frac{u}{c}} = \frac{c + u}{\frac{c+u}{c}} = c$

es decir, cualquier objecto que se mueve con velocidad c respecto a S', también tiene velocidad c con respecto a S, a pesar del movimiento relativo de los sistemas $\Rightarrow$ **La velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia**.